Höhere Mathematik

SS 2025

Prof. Dr. Peter Siegel

Homepage: www.siegelsoft.com

email: pbsiegel@cpp.edu

Course Syllabus

1) Kurven und Kurvenintegrale ~ 3 weeks

2) Integralrechnung mehrere Veränderlicher ~ $1\frac{1}{2}$ weeks

3) Flächen und Flächenintegrale ~ $2\frac{1}{2}$ weeks

4) Integralsätze ~ 3 weeks

Inhaltsverzeichnis

1) Curves + line integrals.

a) How to describe a curve or path?

in 2-D: $y = f(x)$ or $F(x,y) = 0$

in 3-D: one can parametrize x, y, + z

$$r(t): \left(x(t),\ y(t),\ z(t) \right)$$

Example: a straight line from (a_x, a_y, a_z) to (b_x, b_y, b_z)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a_x + t(b_x - a_x) \\ y(t) &= a_y + t(b_y - a_y) \\ z(t) &= a_z + t(b_z - a_z) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 1$$

$t \to t^2$

Example:

$$r(t): \quad \begin{aligned} x(t) &= R\cos(t) \\ y(t) &= R\sin(t) \\ z(t) &= \frac{h}{2\pi}\, t \end{aligned}$$

a coil (Schraubenlinie)

$t \leftrightarrow$ angle around the coil

Some Terms:

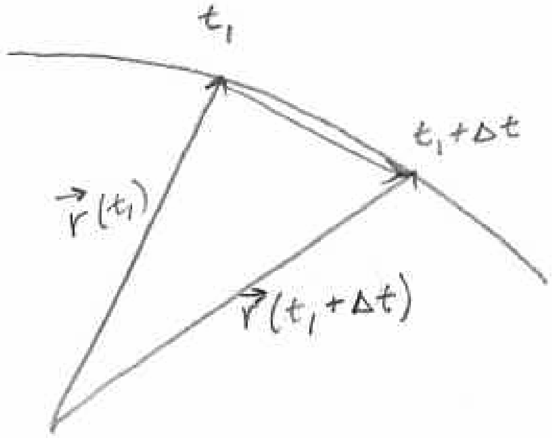
Doppelpunkte: if $r(t_1) = r(t_2)$ for $t_1 \neq t_2$

Geschlossen kurve: for $r: [a \to b]$
$r(a) = r(b)$

Jordankurve: geschlossen und doppelpunktfrei

Tangentenvektor (tangent vector) in 3-D

unit vectors:
$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$



$$\vec{r}(t_1) = x(t_1)\,\hat{e}_x + y(t_1)\,\hat{e}_y + z(t_1)\,\hat{e}_z$$

$$\vec{r}(t_1+\Delta t) = x(t_1+\Delta t)\,\hat{e}_x + y(t_1+\Delta t)\,\hat{e}_y + z(t_1+\Delta t)\,\hat{e}_z$$

Tangent Vector at t_1 $= \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \hat{e}_x + \frac{y(t_1+\Delta t) - y(t_1)}{\Delta t} \hat{e}_y + \frac{z(t_1+\Delta t) - z(t_1)}{\Delta t} \hat{e}_z \right)$$

$$= \frac{dx}{dt} \hat{e}_x + \frac{dy}{dt} \hat{e}_y + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z$$ evaluated at t_1

Unit Tangent vector $= \dfrac{\left(\frac{dx}{dt} \hat{e}_x + \frac{dy}{dt} \hat{e}_y + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z \right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$

Differenzierbar Weg: Tangen Vector Exists and is continuous (stetig)

1 Kurven und Kurvenintegrale

1.1 Wege und Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 1.1:
Sei $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung.

(i) Die Abbildung $\boldsymbol{r}$ heißt Weg im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Der Wertebereich des Weges $\boldsymbol{r}$ wird eine Kurve genannt.

(iii) $\boldsymbol{r}(a)$ heißt Anfangspunkt und $\boldsymbol{r}(b)$ Endpunkt der Kurve.

Definition 1.2:
Sei $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

(i) Gilt $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$, so heißt der Punkt $\boldsymbol{x}$ Doppelpunkt. Ein Weg ohne Doppelpunkte in $[a,b)$ heißt doppelpunktfrei oder einfach. Die zugehörige Kurve wird Jordankurve genannt.

(ii) Gilt $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, so heißt der Weg geschlossen.

(iii) Eine geschlossene Jordankurve wird von einem geschlossenen doppelpunktfreien Weg erzeugt.

Definition 1.3:
Sei $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

(i) Ein Weg $\boldsymbol{r}$ heißt stetig differenzierbar, wenn der Tangentenvektor auf $[a,b]$ existiert und stetig ist. Für einen geschlossenen Weg muß zusätzlich $\frac{d\boldsymbol{r}(a)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}(b)}{dt}$ gelten.

(ii) Ein Weg $\boldsymbol{r}$ heißt glatt, wenn er stetig differenzierbar ist und sein Tangentenvektor für kein $t \in [a,b]$ verschwindet. Eine Kurve heißt glatt, wenn sie von einem glatten Weg erzeugt wird.

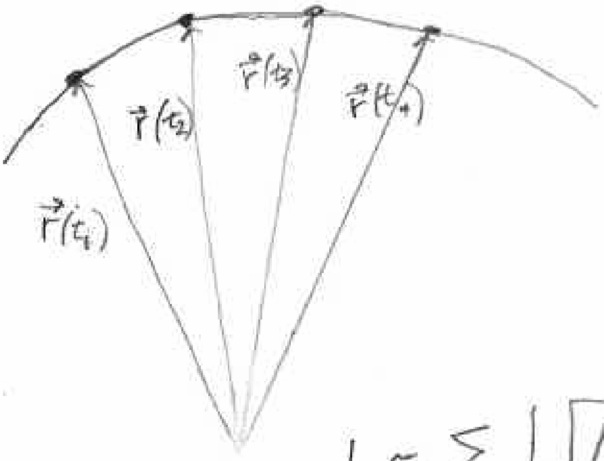
Definition 1.4:
Sei $\boldsymbol{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

(i) Ein Weg $\boldsymbol{r}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn er Summe endlich vieler stetig differenzierbarer Wege $\boldsymbol{r}_i$ ist.

(ii) Ein Weg $\boldsymbol{r}$ heißt stückweise glatt, wenn er Summe endlich vieler glatter Wege $\boldsymbol{r}_i$ ist.

(iii) Eine Kurve heißt stückweise stetig differenzierbar bzw. glatt, wenn sie von einem stückweise stetigen bzw. glatten Weg erzeugt wird.

Length of a curve (Bogenlänge)



$$L \simeq \left|\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)\right| + \left|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_3)\right| + \cdots$$

$$L \simeq \sum_i \left|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i+1})\right|$$

$$L \simeq \sum_i \left| \sqrt{\left[x(t_i) - x(t_{i+1})\right]^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i+1})\right)^2 + \left(z(t_i) - z(t_{i+1})\right)^2} \right.$$

let $t_{i+1} - t_i \equiv \Delta t$

$$L = \sum_i \sqrt{\frac{\left(x(t_i) - x(t_{i+1})\right)^2}{(\Delta t)^2}\,\Delta t^2 + \frac{\left(y(t_i) - y(t_{i+1})\right)^2}{\Delta t^2}\,\Delta t^2 + \frac{\left(z(t_i) - z(t_{i+1})\right)^2}{\Delta t^2}\,\Delta t^2}$$

$\lim_{\Delta t \to 0}$

$$L \simeq \sum_i \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_i^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_i^2}\;\Delta t$$

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt$$

or $$\int_a^b \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

1.2 Bogenlänge

Definition 1.5:
Sei $\boldsymbol{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

(i) Die Bogenlänge von $\boldsymbol{r}$ ist definiert durch $L(\boldsymbol{r}) = \sup L_Z(\boldsymbol{r})$.

(ii) Ein Weg heißt rektifizierbar, wenn seine Bogenlänge endlich ist.

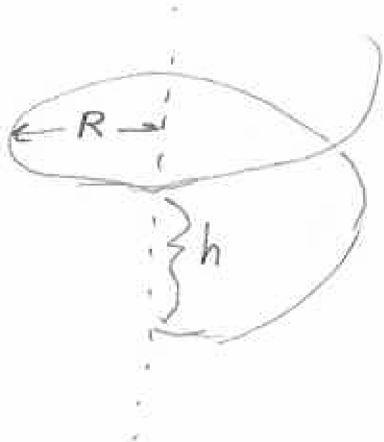
(iii) Die Bogenlänge einer Kurve ist gleich der Bogenlänge des sie erzeugenden Weges.

Satz 1.1:
Jeder stetig differenzierbare Weg ist rektifizierbar.

Satz 1.2:
Für Bogenlänge eines stetig differenzierbaren Weges gilt:

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt.$$

Example: Schraubenlinie (one loop)



$$\left.\begin{aligned} x(t) &= R\cos t \\ y(t) &= R\sin t \\ z(t) &= h\,\frac{t}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -R\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = R\cos t \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h}{2\pi}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\; dt$$

$$L = \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}$$

1. **Kurven** (Übung 1)

   (a) Gegeben sei die Kurve K mit der Parameterdarstellung

   $$x = \sin 2\pi t,\ y = \cos 2\pi t,\ z = 2t - t^2,\ t \in [0, 2].$$

   Man untersuche, ob K eine Jordankurve ist. Ist K geschlossen?
   (Ergebnis: Doppelpunkte für $t = \frac{1}{2}$ und $t = \frac{3}{2}$.)

   (b) Man stelle den Halkreis mit Radius r als Graph einer Funktion dar und berechne daraus die natürliche Parameterdarstellung.
   (Ergebnis: $\boldsymbol{r}(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$, $\boldsymbol{r}_n(s) = (-r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r})$.)

Übung 1: Kurven

a) $X(t) = \sin 2\pi t$; $Y(t) = \cos 2\pi t$; $z = 2t - t^2$

$0 \leq t \leq 2$

For $t=0$ $\quad r(0) = (0, 1, 0)$

For $t=2$ $\quad r(2) = (0, 1, 4-4) = (0, 1, 0)$

The curve is closed (geschlossen)

For $t = 1/2$ $\quad r(1/2) = (\sin \pi, \cos \pi, 1 - \frac{1}{4})$

$= (0, -1, 3/4)$

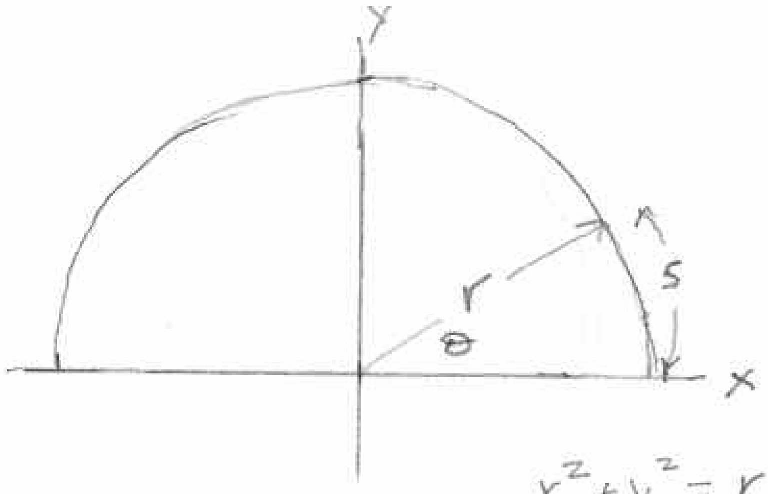
For $t = 3/2$ $\quad r(3/2) = (\sin 3\pi, \cos 3\pi, 3 - (3/2)^2)$

$= (0, -1, 3/4)$

So $\quad r(\frac{1}{2}) = r(3/2) \Rightarrow$ Doppelpunkt

Kein Jordankurve

1b)



$x^2 + y^2 = r^2$

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$x = t$ $\quad -r \leq t \leq r$

$y = \sqrt{r^2 - t^2}$

$r(t) = \left(t, \left| \sqrt{r^2 - t^2} \right| \right) \quad -r \leq t \leq r$

or

$x = r \cos\theta \quad -\pi \leq \theta \leq \theta$

$y = r \sin\theta$

$r(t) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \quad -\pi \leq \theta \leq 0$

or $\theta = s/r$

$x = -r \cos\left(\frac{s}{r}\right) \quad 0 \leq s \leq r\pi$

$y = r \sin\left(\frac{s}{r}\right)$

$r(t) = \left(-r \cos\frac{s}{r}, r \sin\frac{s}{r}\right) \quad 0 \leq s \leq r\pi$

3. **Bogenlänge** (Übung 1)

Man bestimme jeweils den Tangenteneinheitsvektor und die Bogenlänge der Kurven, gegeben durch die unten stendenden Parameterdarstellungen. Sind die Kurven glatt?

(a) $x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3,\ t \in [0,1]$.
(Ergebnis: $\frac{5}{3}$.)

(b) $x = t - \frac{1}{3}t^3,\ y = t^2,\ z = t + \frac{1}{3}t^3,\ t \in [0,1]$.
(Ergebnis: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.)

(c) $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t,\ t \in [0,b]$.
(Ergebnis: $\sqrt{2}\sinh b$.)

Übung 3. Bogenlänge

a) $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3} t^3$ $\quad t \in [0,1]$

$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \frac{dz}{dt} = 2t^2$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2 + (2t^2)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1+2t^2)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^1 (1+2t^2)\, dt = \left(t + \frac{2}{3} t^3\right)_0^1$$

$$L = 1 + 2/3 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

b) $x = t - \frac{1}{3} t^3$; $y = t^2$; $z = t + \frac{t^3}{3}$ $\quad t \in [0,1]$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2$$

$$= 1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4$$

$$= 2 + 4t^2 + 2t^4$$

$$= 2(1 + 2t^2 + t^4) = 2(1+t^2)^2$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{2(1+t^2)^2}\, dt = \sqrt{2} \int_0^1 (1+t^2)\, dt$$

$$L = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3}\right)_0^1 = \boxed{\sqrt{2}\ \frac{4}{3}}$$

Übung 3c.

$$x = \cosh t \quad ; \quad y = \sinh t \quad ; \quad z = t \qquad t \in [0, b]$$

Note: $\cosh t = \dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad \sinh t = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \sinh t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \cosh t \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = 1$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \sinh^2 t + \cosh^2 t + 1$$

$$= (\sinh^2 t + \cosh^2 t) + 1$$

$$= \frac{(e^{2t} + e^{-2t})}{2} + 1$$

$$= \frac{(e^{2t} + 2 + e^{-2t})}{2}$$

$$= 2\cosh^2 t$$

$$L = \int_0^b \sqrt{2\cosh^2 t}\; dt$$

$$L = \sqrt{2} \int_0^b \cosh t \; dt = \sqrt{2} \sinh t \Big|_0^b = \boxed{\sqrt{2} \sinh b}$$

Skalarfeld und Vecktorfeld

Skalarfeld: a scalar is defined at
φ every point in space: $\varphi(\vec{r})$

In 3-D: $\varphi(x, y, z)$ In 2-D: $\varphi\left(\begin{smallmatrix}\text{on the}\\ \text{surface}\end{smallmatrix}\right)$ In 1D: $\varphi(s)$
at points on a curve

Examples: density (Dichte) mass, charge, .
Temperature (Temperatur)
Humidity (Feuchtigkeit)
Pressure (Druck)
Gravitational potential

Vectorfeld: a vector is defined at every point
in space:

$$\vec{V}(\vec{r}): v_x(x,y,z)\,\hat{e}_x + v_y(x,y,z)\,\hat{e}_y + v_z(x,y,z)\,\hat{e}_z$$

Examples: Velocity in a fluid
3D acceleration in a fluid
Forces in a fluid

2D
on a surface

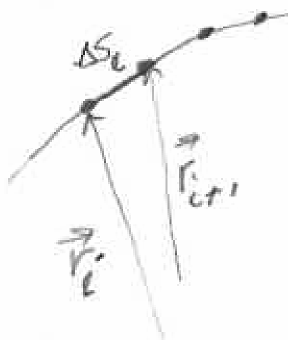
on a path

Overview

	Scalar field	Vector Field
Differentiate	$\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow$ Vector	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \Rightarrow$ scalar $\vec{\nabla}\times\vec{V} \Rightarrow$ vector
Integrate Curve	$\int \varphi(\vec{r})\overbrace{\left\lvert\frac{d\vec{r}}{dt}\right\rvert dt}^{\lvert d\vec{s}\rvert}$	$\int \vec{V}(\vec{r})\cdot d\vec{s}$ + $\int \vec{V}(r)\times d\vec{s}$
Surface	$\iint \varphi(\vec{r})\,dA$	$\iint \vec{V}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dA$ or $\iint \vec{V}(\vec{r})\times\hat{n}\,dA$
Volume	$\iiint \varphi(\vec{r})\,dx\,dy\,dz$	

Kurvenintegrale

Kurvenintegral Skalarfeld



$$\Delta S_i = \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i+1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i+1})\right)^2 + \left(z(t_i) - z(t_{i+1})\right)^2}$$

$$\int_C \varphi(\vec{r})\, ds \approx \sum_i \varphi(\vec{r}_i)\, \Delta S_i = \sum_i \varphi(\vec{r}_i) \frac{\Delta S_i}{\Delta t} \Delta t$$

$$= \sum_i \varphi(\vec{r}_i) \left| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \right| \Delta t$$

$$= \int \varphi(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

Generalization of 1 Dim integral on "x-axis"

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{to curve in 3 Dim}$$

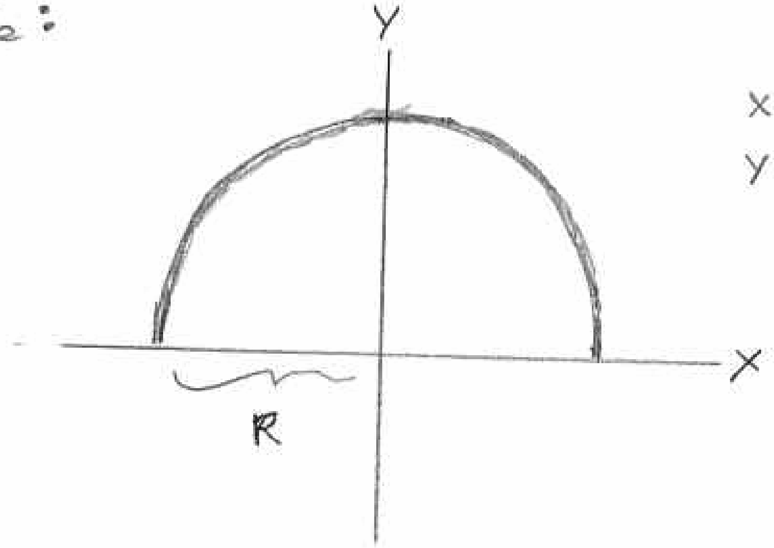
Note: $$L = \int \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

1.4 Kurvenintegrale

Definition 1.10 (Kurvenintegrale):
Das Kurvenintegral eines Skalarfeldes ist definiert durch

$$\int_C \varphi(\boldsymbol{x})ds = \int_0^L \varphi(\boldsymbol{r}_N(s))ds = \int_a^b \varphi(\boldsymbol{r}(t)) \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt.$$

Example:



$x(t) = R\cos t$
$y(t) = R\sin t$

$0 \leq t \leq \pi$

konstante Masse pro Länge $\equiv \mu$

a) Total Mass $M = ?$

$$M = \int_0^\pi \mu \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}_{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \, dt$$

$$M = \int_0^\pi \mu \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} \, dt = \int_0^\pi \mu R \, dt = \mu \pi R$$

b) Massenschwerpunkts $\begin{cases} x_s = 0 \\ y_s = ? \end{cases}$

$$y_s = \frac{1}{M} \int y \, \underbrace{\mu \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt}_{\text{"}dm\text{"}}$$

skalarfeld

$$Y_s = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} (R \sin t)\ \mu\ R\,dt$$

$$Y_s = \frac{1}{M}\ \mu R^2 \int_0^{\pi} \sin t\ dt$$

$$Y_s = \frac{1}{\mu \pi R}\ \mu R^2\ (-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{R}{\pi}\left(1-(-1)\right)$$

$$\boxed{Y_s = \frac{2}{\pi} R}$$

c) Massenträgheitsmomente J_x about x-axis

$$J_x = \int \mu\, y^2 \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

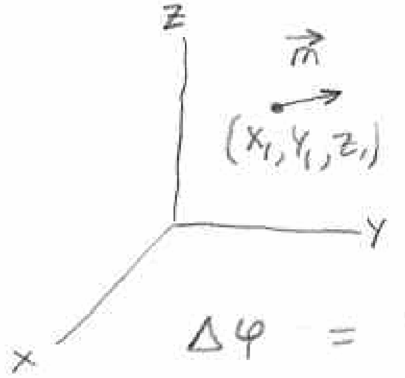
skalarfeld

$$J_x = \int_0^{\pi} \mu (R \sin t)^2\ R\,dt$$

$$J_x = \mu R^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt = \mu R^3 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$J_x = \frac{\mu R^3 \pi}{2} = \frac{M}{\pi R}\ \frac{R^3}{2}\ \pi = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

unit vector $\vec{m}$



$$\vec{m} = m_x \hat{e}_x + m_y \hat{e}_y + m_z \hat{e}_z$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = 1$$

$$x_2 = x_1 + m_x \Delta t \,, \quad y_2 = y_1 + m_y \Delta t \,, \quad z_2 = z_1 + m_z \Delta t$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z) - \varphi(x_1, y_1, z_1)$$

$$\Delta x = m_x \Delta t \qquad \Delta y = m_y \Delta t \qquad \Delta z = m_z \Delta t$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x_1 + m_x \Delta t, \; y_1 + m_y \Delta t, \; z_1 + m_z \Delta t) - \varphi(x_1, y_1, z_1)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} m_x \Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial y} m_y \Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial z} m_z \Delta t$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} m_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} m_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} m_z$$

Define $\vec{\nabla}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \hat{e}_z$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{m}$$

The derivative of φ in the direction $\vec{m}$

grad φ: $\vec{\nabla}\varphi \equiv \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \hat{e}_i$

Gradient des Skalarfeldes $\varphi(x, y, z_1)$

$\vec{\nabla}\varphi$ points in the direction of the greatest change in $\varphi(x, y, z)$

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Gradientenfelder der folgenden Skalarfelder:

a) $\phi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $D=\mathbb{R}^3$

b) $\phi(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $D=\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$

c) $\phi(x,y)=\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)x$, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1\}$

1a) $\vec{\nabla}\varphi$ where $\varphi = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x\,\hat{e}_x + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} 2y\,\hat{e}_y + \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z\,\hat{e}_z$$

$$= \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}$$

b) $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\, 2x\,\hat{e}_x + \dots$$

$$= \frac{-x\,\hat{e}_x - y\,\hat{e}_y - z\,\hat{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-\vec{r}}{r^{3/2}}$$

c) $\varphi(x,y) = \left(1 + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right)x$ in the x-y plane

$$\vec{\nabla}\varphi = \left[\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right) + x\left(\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(2x)\right)\right]\hat{e}_x + \frac{(-x)}{(x^2+y^2)^2}(2y)\,\hat{e}_y$$

$$= \left[1 + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\hat{e}_x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\hat{e}_y$$

$$= \left[1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\hat{e}_x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\hat{e}_y$$